



# ! Antworten zur "Mathematik der Oktave"

Eine Oktave hat das Frequenzverhältnis von  $y = f_2 / f_1 = 2 : 1$ . Zwischen 100 Hz und 200 Hz oder 1000 Hz und 2000 Hz oder 10000 Hz und 20000 Hz liegt jeweils eine Oktave.

$f_2$  = obere Frequenz,  $f_1$  = untere Frequenz,  $f_0$  = Mittenfrequenz und  $N$  = Anzahl der Oktaven.

Der mathematische Ausdruck der Oktave ist:  $f_2 / f_1 = 2^N$

Beide Seiten logarithmiert ergibt:  $\log(f_2 / f_1) = N \cdot \log 2$

Nach  $N$  aufgelöst:

$$N = \frac{\log(f_2 / f_1)}{\log 2}$$

1. Wie viele Oktaven liegen im hörbaren Frequenzbereich von  $f_1 = 20$  Hz bis  $f_2 = 20$  kHz?

$N = \log(f_2 / f_1) / \log 2 = \log 1000 / \log 2 = 3 / 0,3010 = 9,966$  Oktaven, also fast genau 10 Oktaven.

2. Wie heißt die obere Frequenz  $f_2$ , die ganz genau 10 Oktaven über 20 Hz liegt? Bitte mit Nebenrechnung.

$$y = f_2 / f_1 = 2^N \quad f_2 = 2^N \cdot f_1 = 2^{10} \cdot 20 = 1024 \cdot 20 = 20480 \text{ Hz.}$$

3. Wenn die untere Frequenz  $f_1 = 440$  Hz (Kammerton a') ist, welche Frequenz  $f_2$  liegt  $1\frac{1}{2}$  Oktaven höher und welcher Tonname ist das genau?

$$y = f_2 / f_1 = 2^N \quad f_2 = 2^N \cdot f_1 = 2^{1,5} \cdot 440 = 2,28 \cdot 440 = 1244,5 \text{ Hz. Der Tonname ist dis}'''. \text{ (Oktave + Tritonus)}$$

4. Wie heißt die obere und untere Grenzfrequenz  $f_2$  und  $f_1$  bei einem Bandpaß mit einer Bandbreite von  $B = 1/3$  Oktave (Terzfilter), wenn die Mittenfrequenz  $f_0 = 1$  kHz ist?

Die obere Frequenz  $f_2$  liegt  $1/6$  Oktave höher als  $f_0$ . Das ist die Hälfte einer  $1/3$  Oktave. Deshalb ist  $N = 1/6$ .

$$f_2 / f_0 = 2^N = 2^{1/6} \quad f_2 = f_0 \cdot 2^{1/6} = 1000 \cdot 1,12246 = 1122,5 \text{ Hz.}$$

Die untere Frequenz  $f_1$  liegt  $1/6$  Oktave tiefer als  $f_0$ .

$$f_0 / f_1 = 2^N = 2^{-1/6} \quad f_1 = f_0 \cdot 2^{-1/6} = 1000 \cdot 0,890899 = 890,9 \text{ Hz.}$$

5. Wie groß ist die "Bandbreite in % von der Mittenfrequenz"  $f_0 = 1000$  Hz bei einer Bandbreite  $B = 1/3$  Oktave? Die Antworten von Aufgabe 4 bitte mitbenutzen.

$$B \text{ in \% von } f_0 = 100 (f_2 - f_1) / f_0 = 100 (1122,5 - 890,9) / 1000 = 23,16 \text{ \%}.$$

6. Bitte rechnen Sie genau aus (nicht schätzen): Wie viele Oktaven sind in einer logarithmischen Dekade?

Bei einer Dekade ist  $f_2 = 10 \cdot f_1$  und  $f_2 / f_1 = 10$ .

$N = \log(f_2 / f_1) / \lg 2 = \log 10 / \log 2 = 1 / 0,3010 = 3,322$ . Also sind 3,322 Oktaven in einer Dekade.